1 Calcul algébrique, équations

Exercice 1 :

Compléter les égalités suivantes de sorte qu'elles soient vérifiées pour tout nombre réel x :

1. $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$.
2. $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$.
3. $(x+6)^2 = x^2 + 12x + 36$.
4. $\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right) = x^2 - 5$.
5. $x^2 - \dfrac{4x}{3} + \dfrac{4}{9} = \left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2$.

Exercice 2 :

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la bonne réponse.

1. Une expression factorisée de $x^2 - 15x + 14$ est :

   a. $x(x-15)+14$ **b.** $(x-7)(x-2)$ $\boxed{\textbf{c. } (x-1)(x-14)}$.

⚠ : L'expression a. est égale à $x^2 - 15x + 14$ mais n'est pas factorisée.

2. Une expression développée de $(2x-1)(-x+3)$ est :

   a. $5x-3$ **b.** $-2x^2+5x-3$ $\boxed{\textbf{c. } -2x^2+7x-3}$.

3. Une expression factorisée de $(3x+1)^2 - 25$ est :

   $\boxed{\textbf{a. } 3(3x-4)(x+2)}$ **b.** $9x^2+6x-24$ **c.** $(3x-4)^2$.

4. Une expression développée de $2(x-1)^2 - 3$ est :

   a. $4x^2-8x+1$ **b.** $2x^2-5$ $\boxed{\textbf{c. } 2x^2-4x-1}$.

5. Une expression égale à $2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+2)$ est :

   a. $(2x-1)(2x+4)$ $\boxed{\textbf{b. } 2x^2+3x-2}$ **c.** $x^2+\dfrac{3}{2}x-1$.

Exercice 3 :

1.
$$\begin{aligned} & 2x+3 = 4(x-2) \\ \iff & 2x+3 = 4x-8 \\ \iff & -2x = -11 \\ \iff & x = \frac{11}{2} \end{aligned}$$
Donc $\boxed{S = \left\{\dfrac{11}{2}\right\}}$

2.
$$\begin{aligned} & (4x-1)(2x+7) = 0 \\ \iff & 4x-1 = 0 \text{ ou } 2x+7 = 0 \\ \iff & x = \frac{1}{4} \text{ ou } x = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$
Donc $\boxed{S = \left\{\dfrac{1}{4}, -\dfrac{7}{2}\right\}}$

3.
$$\begin{aligned} & 3x^2 - 9 = 0 \\ \iff & 3x^2 = 9 \\ \iff & x^2 = 3 \end{aligned}$$
Donc $\boxed{S = \left\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right\}}$

4.
$$\begin{aligned} & x^2 + 5 = 0 \\ \iff & x^2 = -5 \end{aligned}$$
Mais le carré d'un nombre réel est toujours positif. L'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Donc $S = \emptyset$

5.
$$\begin{aligned} & 3x-7 > 8x+3 \\ \iff & -5x > 10 \\ \iff & x < -2 \end{aligned}$$
Donc $\boxed{S =]-\infty\,;\,-2[}$.

6.
$$\begin{aligned} & \frac{8}{3}x - 2 \leqslant 2 - 2(x+4) \\ \iff & \frac{8}{3}x - 2 \leqslant 2 - 2x - 8 \\ \iff & \frac{8}{3}x + 2x \leqslant 2 - 8 + 2 \\ \iff & \frac{14}{3}x \leqslant -4 \\ \iff & x \leqslant -4 \times \frac{3}{14} \\ \iff & x \leqslant -\frac{6}{7} \end{aligned}$$
Donc $\boxed{S = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{6}{7}\right]}$.

Exercice 4 :

Attention à la rédaction.

Montrer, pour tout nombre réel x, les égalités suivantes :

1. $(2x-1)^2-4=4x^2-4x-3$;

   Pour tout réel x, on a $(2x-1)^2-4=4x^2-4x+1-4=4x^2-4x-3$.

   Donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ (2x-1)^2-4=4x^2-4x-3.}$

2. $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$;

   Pour tout réel x, on a $(x-1)(x^2+x+1)=x^3+x^2+x-x^2-x-1=x^3-1$.

   Donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).}$

3. $x^2+(x+1)^2=\dfrac{(2x+1)^2+1}{2}$.

   D'une part, on a $x^2+(x+1)^2=x^2+x^2+2x+1=2x^2+2x+1$,

   D'autre part, on a $\dfrac{(2x+1)^2+1}{2}=\dfrac{4x^2+4x+1+1}{2}=\dfrac{4x^2+4x+2}{2}=2x^2+2x+1$.

   Donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ x^2+(x+1)^2=\dfrac{(2x+1)^2+1}{2}.}$

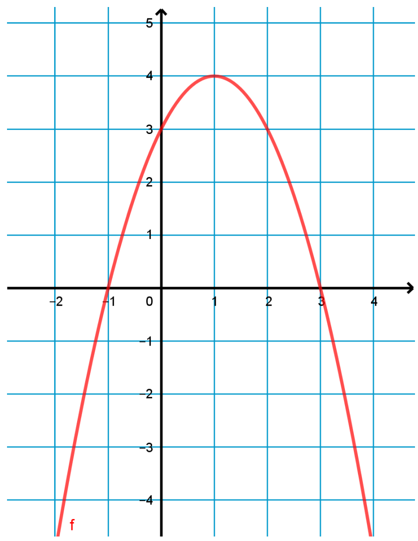
2 Fonctions, étude graphique

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 4]$, dont on donne la représentation graphique ci-contre.

1. Dresser le tableau de variations de f.

x	-2		1		4
f			4		
	-5	$\nearrow$		$\searrow$	-5



2. $f(x)=0$ pour $\boxed{x=-1 \text{ ou } x=3}$.
3. $f(x)\leqslant 3$ pour $\boxed{x\in[-2\ ;\ 0]\cup[2\ ;\ 4]}$.
4. $f(x)$ est strictement positif pour $\boxed{x\in]-1\ ;\ 3[}$.
5. Établir le tableau de signe de $f(x)$.

x	-2		-1		3		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 6 :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I=[-7\ ;\ 6]$ dont la courbe est donnée ci-dessous.

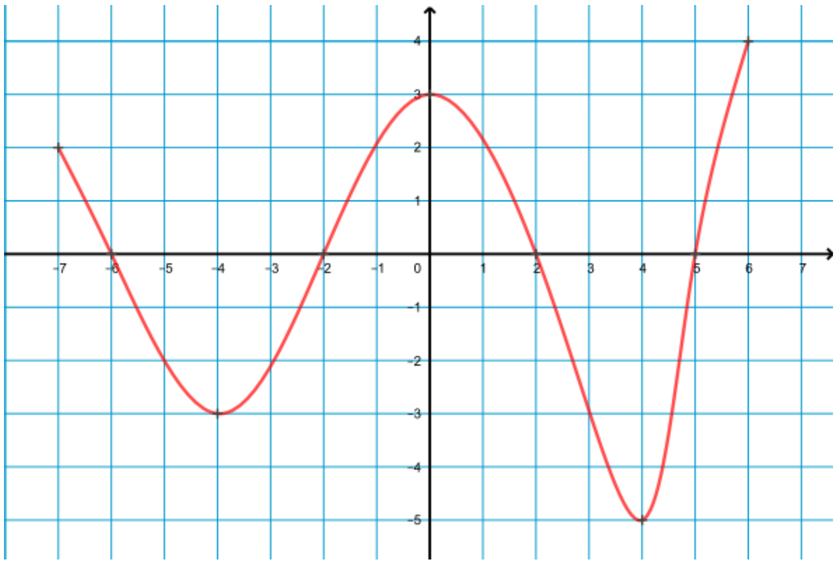
1. Dresser le tableau de signes de la fonction g sur I.

x	-7		-6		-2		2		5		6
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Dresser le tableau de variations complet de g sur I.

x	-7		-4		0		4		6
g	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	4

3. Le minimum de g est -5. Il est atteint pour $x = 4$.
   Le maximum de g est 4. Il est atteint pour $x = 6$.

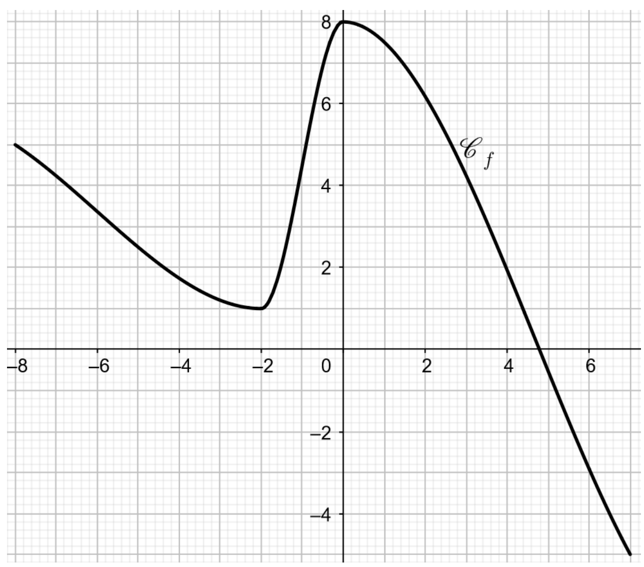


Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $[-8\ ;\ 7]$ dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	-8		-2		0		7
f	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	8	$\searrow$	-5

1. L'image de -2 par f est 1. (On peut écrire $\boxed{f(-2) = 1}$.
2. -8 n'admet pas d'antécédent par f car le minimum de f est -5 et $-8 < -5$.
3. L'équation $f(x) = 0$ admet une solution a qui appartient à l'intervalle $]0\ ;\ 7[$.
4. 7 est un nombre qui a exactement deux antécédents par f.
   Tout nombre appartenant à l'intervalle $]5\ ;\ 8[$ possède exactement deux antécédents par f.
5. Le minimum de f est -5. Il est atteint pour $x = 7$.
   Le maximum de f est 8. Il est atteint pour $x = 0$.
6. Proposer une courbe représentative possible pour la fonction f.



3 Fonctions usuelles

Exercice 8 :
On note c la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$ par $c(x) = x^2$ et $\mathscr{P}$ sa courbe dans un repère orthogonal. Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

1. La courbe $\mathscr{P}$ est une hyperbole.
   FAUX : La courbe $\mathscr{P}$ est une parabole.
2. La fonction c est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
   VRAI
3. La fonction c est impaire.
   FAUX : la fonction c est paire. En effet, pour tout réel x, $c(x) = c(-x)$.
   (On vérifie bien : $c(-x) = (-x)^2 = x^2 = c(x)$)
4. $\mathscr{P}$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
   VRAI : c est paire, donc, sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
5. Si a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b \leqslant 0$, alors $a^2 \leqslant b^2$.
   FAUX : La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$, elle inverse donc l'ordre. Ainsi, si a et b sont des réels négatifs tels que $a \leqslant b$, alors $a^2 \geqslant b^2$.

Exercice 9 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 5$ et h un nombre quelconque.
   (a) $f(-3) = 2 \times (-3) - 5 = \underline{-11}$.
   (b) $f(3+h) = 2(3+h) - 5 = 6 + 2h - 5 = \underline{2h+1}$.
   (c) $f(-2+h) = 2(-2+h) - 5 = -4 + 2h - 5 = \underline{2h-9}$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 3x + 1$ et h un nombre réel quelconque.
   (a) $g(3+h) = (3+h)^2 - 3(3+h) + 1 = 9 + 6h + h^2 - 9 - 3h + 1 = \underline{h^2 + 3h + 1}$.
   (b) $g(-2+h) = (-2+h)^2 - 3(-2+h) + 1 = 4 - 4h + h^2 + 6 - 3h + 1 = \underline{h^2 - 7h + 11}$.
   (c) Le point $A(3\,;\,1)$ appartient à la courbe représentative de g si et seulement si $g(3) = 1$.
   Or $g(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 1 = 9 - 9 + 1 = 1$. $\boxed{A \text{ appartient donc bien à la courbe de } g}$.

Exercice 10 :
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 24$

1. Déterminer les images par f des entiers 0 ; 2 et 10.
   $f(0) = -24$, $f(2) = -14$ et $f(10) = 26$
2. Soit n un entier naturel.
   (a) $f(n) = \underline{5n - 24}$.
   (b) $f(n+1) = 5(n+1) - 24 = 5n + 5 - 24 = \underline{5n - 19}$.
   (c) $f(n+1) - f(n) = 5n - 19 - (5n - 24) = 5n - 19 - 5n + 24 = \underline{5}$.
   Remarque : $f(n+1) - f(n)$ ne dépend pas de n : la différence vaut 5, quel que soit n.

Exercice 11 :
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si f est une fonction décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors on a $f(100) \leqslant f(50)$.
   VRAI : 100 et 50 sont deux réels de $[0\,;\,+\infty[$, avec $100 \geqslant 50$. Or, sur $[0\,;\,+\infty[$, f est décroissante, elle inverse donc l'ordre. Ainsi $f(100) \leqslant f(50)$.

2. Si f est une fonction croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors on a $f(1{,}99) \leqslant f(2)$.
   VRAI : 1,99 et 2 sont deux réels de $[0\ ;\ +\infty[$, avec $1{,}99 \leqslant 2$. Or, sur $[0\ ;\ +\infty[$, f est croissante, elle conserve donc l'ordre. Ainsi $f(1{,}99) \leqslant f(2)$.
3. Si f est une fonction croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors, pour tout entier naturel n, $f(n) \geqslant f(n+1)$.
   FAUX : n et $n+1$ sont entiers naturels, ils appartiennent donc à $[0\ ;\ +\infty[$, et $n \leqslant n+1$. Or, sur $[0\ ;\ +\infty[$, f est croissante, elle conserve donc l'ordre. Ainsi $f(n) \leqslant f(n+1)$.
4. Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2-5x$.
   Pour tout entier naturel n, on a : $f(n) \leqslant f(n+1)$.
   FAUX : Pour tout entier naturel n, on a : $f(n) \geqslant f(n+1)$. En effet :
   $f(n) = 2-5n$ et $f(n+1) = 2-5(n+1) = 2-5n-5 = -3-5n$.
   On a $f(n) - f(n+1) = 2-5n-(-3-5n) = 2-5n+3+5n = 5$.
   Donc, pour tout entier naturel n, $f(n)-f(n+1) \geqslant 0$, ce qui est équivalent à $f(n) \geqslant f(n+1)$.
   (*Remarque* : On aurait pu aussi remarquer que f est décroissante et inverse l'ordre).

4 Étude de signe, Inéquation

Exercice 12 :
On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -4x+6, \qquad g(x) = 2x-3 \qquad \text{et} \qquad h(x) = -3x+2$$

Associer à chaque fonction son tableau de signes et sa représentation graphique.

Tableau 1

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

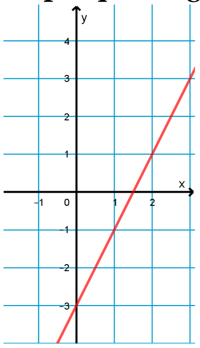
Tableau 2

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

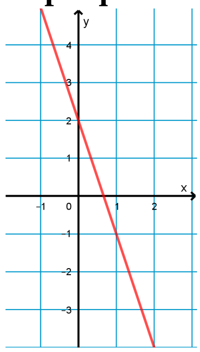
Tableau 3

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

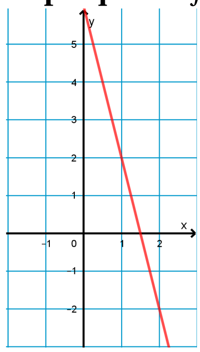
Graphique c - g



Graphique a - h



Graphique b - f



Exercice 13 :

$$\begin{aligned}
-2(3-7x) < 5x+3(6x-2)-2 &\iff -6+14x < 5x+18x-6-2\\
&\iff -6+14x < 23x-8\\
&\iff 14x-23x < -8+6\\
&\iff -9x < -2\\
&\iff x > \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{S = \left]\frac{2}{9}\ ;\ +\infty\right[}$.

Exercice 14 :

Étudions le signe des fonctions suivantes à l'aide d'un tableau :

1. $f(x) = (3x-1)(2-x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f est positive sur $\left[\frac{1}{3}\ ;\ 2\right]$ et négative sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right] \cup [2\ ;\ +\infty[$.

2. $g(x) = \dfrac{3x+1}{4x-1}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

g est positive sur $\left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$ et négative sur $\left[-\frac{1}{3}\ ;\frac{1}{4}\right[$.

3. $h(x) = 3x(7-2x)(x-1)$

x	$-\infty$		0		1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$7-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

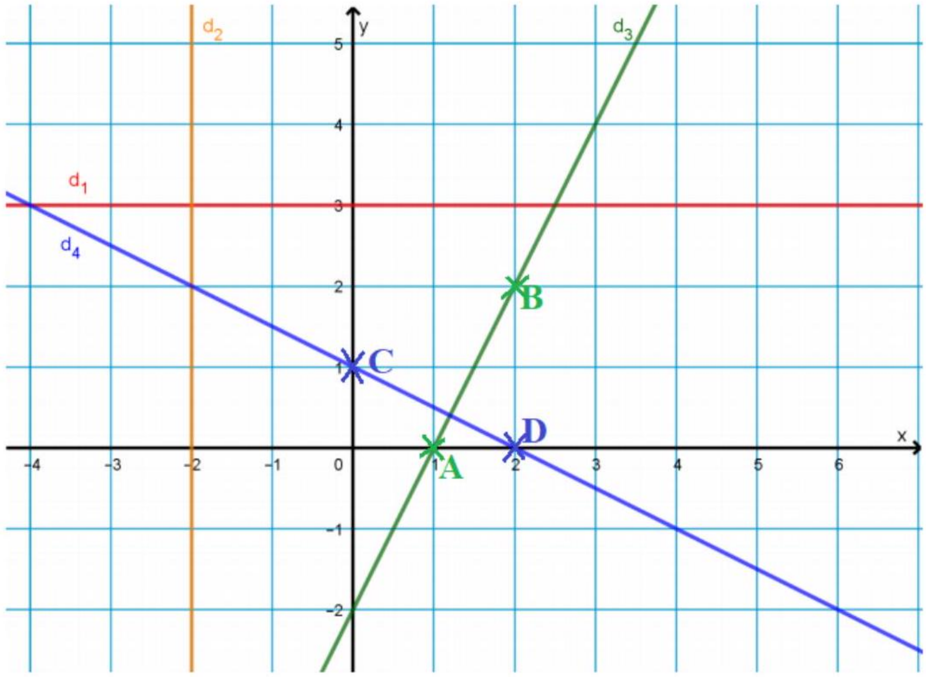
h est positive sur $]-\infty\ ;\ 0] \cup \left[1\ ;\ \frac{7}{2}\right]$ et négative sur $[0\ ;\ 1] \cup \left[\frac{7}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

4. $k(x) = \dfrac{-2}{(2x+3)^2}$
   - -2 est négatif;
   - $(2x+3)^2$ est un carré donc est toujours positif et s'annule pour $x = -\frac{3}{2}$.

   Comme le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif, on en déduit que, pour tout réel x différent de $-\frac{3}{2}$, $k(x)$ est négatif.

5 Droites, système

Exercice 15 :



1. La droite d_1 admet pour équation $y = 3$.
2. La droite d_2 admet pour équation $x = -2$.
3. La droite d_3 passe par les points A(1;0) et B(2;2).
   Donc son coefficient directeur est égal à : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2-0}{2-1} = 2$.
4. Graphiquement, la droite d_4 « descend », c'est-à-dire que plus l'abscisse d'un point de d_4 est grande plus son ordonnée est petite.
   On en déduit que le coefficient directeur de d_4 est strictement négatif.
5. La droite d_1 est parallèle à l'axe des abscisses.
   Donc elle admet un coefficient directeur égal à 0 qui est donc à la fois positif et négatif.
6. La droite d_4 passe par les points C(0;1) et D(2;0).
   Donc son coefficient directeur est égal à : $\dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{0-1}{2-0} = -\dfrac{1}{2}$ et son ordonnée à l'origine est égale à 1.
   Ainsi l'équation réduite de d_4 est : $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$.

Exercice 16 :

1. Nous avons $-6x_A + 15 = -6 \times 2 + 15 = 3$. Or $3 \neq y_A$. Donc $A \notin d$.
   Nous avons $-6x_B + 15 = -6 \times 5 + 15 = -15 = y_B$. Donc $B \in d$.
2. Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-15-(-3)}{5-2} = \dfrac{-12}{3} = -4$.
   L'équation réduite de (AB) est donc de la forme $y = -4x + p$ où p est un réel. Comme A un point de (AB) alors $y_A = -4x_A + p$ soit $-3 = -4 \times 2 + p$ donc $p = -3 + 8 = 5$.
   L'équation réduite de (AB) est donc $y = -4x + 5$.

3. La droite d' étant parallèle à d, elle a le même coefficient directeur -6 que d. Comme d' passe par l'origine du repère alors son ordonnée à l'origine vaut 0.
   Donc son équation réduite est $y = -6x$.

Exercice 17 :

$S_1 \begin{cases} 6x + 9y - 7 = 0 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$

On a : $6 \times 3 \neq 9 \times 1$. Donc ce système admet une unique solution.
Procédons par substitution :

$$S_1 \iff \begin{cases} 6(-3y-1) + 9y - 7 = 0 \\ x = -3y - 1 \end{cases}$$

$$S_1 \iff \begin{cases} -9y - 13 = 0 \\ x = -3y - 1 \end{cases}$$

$$S_1 \iff \begin{cases} y = -\dfrac{13}{9} \\ x = -3 \times \left(-\dfrac{13}{9}\right) - 1 \end{cases}$$

$$S_1 \iff \begin{cases} y = -\dfrac{13}{9} \\ x = \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

Donc la solution est $\left(\dfrac{10}{3} \,;\, -\dfrac{13}{9}\right)$.

$S_2 \begin{cases} -5x + 2y = -17 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$

On a : $-5 \times 3 \neq 2 \times 2$.
Donc ce système admet une unique solution.
Procédons par combinaison en multipliant la 1$^{\text{ère}}$ égalité par 2 et la 2$^{\text{e}}$ égalité par 5 :

$$S_2 \iff \begin{cases} -10x + 4y = -34 \\ 10x + 15y = -20 \end{cases}$$

On additionne membre à membre :

$$S_2 \iff \begin{cases} 19y = -54 \\ 10x + 15y = -20 \end{cases}$$

$$S_2 \iff \begin{cases} y = -\dfrac{54}{19} \\ 10x + 15 \times \left(-\dfrac{54}{19}\right) = -20 \end{cases}$$

$$S_2 \iff \begin{cases} y = -\dfrac{54}{19} \\ 10x = -20 + \dfrac{810}{19} \end{cases}$$

$$S_2 \iff \begin{cases} y = -\dfrac{54}{19} \\ 10x = \dfrac{430}{19} \end{cases}$$

$$S_2 \iff \begin{cases} y = -\dfrac{54}{19} \\ x = \dfrac{43}{19} \end{cases}$$

Donc la solution est $\left(\dfrac{43}{19} \,;\, -\dfrac{54}{19}\right)$.

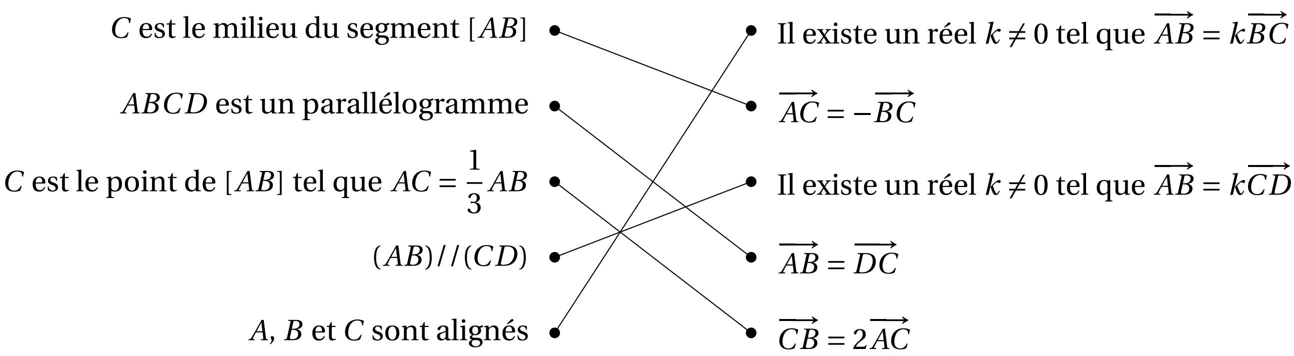
$S_3 \begin{cases} -5x + 4y + 2 = 0 \\ 10x - 8y + 4 = 0 \end{cases}$

On a $-5 \times (-8) = 10 \times 4$.
Donc ce système a soit aucune solution soit une infinité de solutions.
Comme $-5 \times 4 \neq 10 \times 2$ alors ce système n'admet aucune solution.

6 Géométrie analytique, vecteurs

Exercice 18 :

On rappelle qu'on parle de « caractérisation » lorsqu'il y a équivalence entre les deux énoncés.



Exercice 19 :

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
2. $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{EI} - \overrightarrow{ED}$
3. $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{0}$
4. $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK}$

Exercice 20 :

1. Nous avons :

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
$AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-2)^2}$
$AB = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2}$
$AB = \sqrt{9+4}$
$AB = \sqrt{13}$

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$
$AC = \sqrt{(6-2)^2 + (-4-2)^2}$
$AC = \sqrt{4^2 + (-6)^2}$
$AC = \sqrt{16+36}$
$AC = \sqrt{52}$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$
$BC = \sqrt{(6-(-1))^2 + (-4-0)^2}$
$BC = \sqrt{7^2 + (-4)^2}$
$BC = \sqrt{49+16}$
$BC = \sqrt{65}$

2. On a : $AB^2 + AC^2 = 13 + 52 = 65 = BC^2$.
   Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en A.
3. K étant le milieu de $[BC]$, on a : $x_K = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{-1+6}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{0+(-4)}{2} = -2$.
   D'où $K\left(\dfrac{5}{2}; -2\right)$.
4. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6-2 \\ -4-2 \end{pmatrix} \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

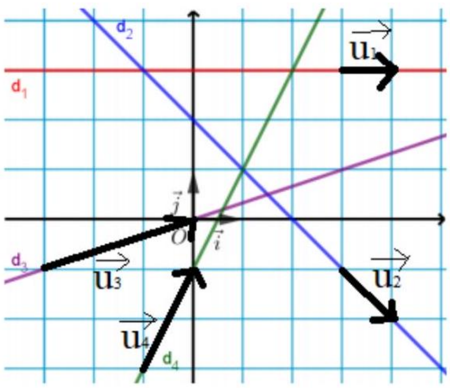
Exercice 21 :

On rappelle que $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul, c'est-à-dire si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

1. $8\alpha - 3 \times (-16) = 0 \iff 8\alpha = -48 \iff \alpha = -6$
2. $2\beta - (-5) \times 7 = 0 \iff 2\beta = -35 \iff \beta = -\dfrac{35}{2}$
3. $\gamma^2 - 4 \times 9 = 0 \iff \gamma^2 = 36 \iff \gamma = 6$ ou $\gamma = -6$

Exercice 22 :

1. Un vecteur directeur de d_1 est $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Un vecteur directeur de d_2 est $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. Un vecteur directeur de d_3 est $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. Un vecteur directeur de d_4 est $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Exercice 23 :

On rappelle que :

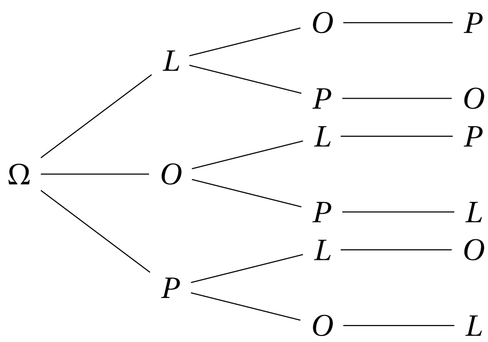
- une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ (avec a, b, c des réels, $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$) admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$;

- une droite d'équation réduite $y = mx + p$ (avec m et p des réels) admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$;
- une droite d'équation réduite $x = k$ (avec k un réel) admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

1. $y = 4x+8$ est l'équation réduite de d_1. Donc $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_1.
2. $4x-3y+7=0$ est une équation cartésienne de d_2 donc $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_2.
3. $-9x = 2 \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{9}$ qui est l'équation réduite de d_3 donc $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_3.
4. $5x+2y=9 \iff 5x+2y-9=0$ qui est une équation cartésienne de d_4 donc $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_4.

7 Probabilités

Exercice 24 :



1. Nous avons $3 \times 2 \times 1 = 6$.
   Il y a 6 circuits possibles (voir l'arbre ci-contre).
2. (a) L'événement A possède 2 éléments :
   (L, O, P) et (L, P, O).
   L'événement B possède 2 éléments :
   (L, P, O) et (P, L, O).

   (b)

- $A \cap B$ est l'événement « le circuit commence par le musée du Louvre et se termine par le musée d'Orsay ». Il possède un seul élément : le circuit (L, P, O).
- $A \cup B$ est l'événement « le circuit commence par le musée du Louvre ou se termine par le musée d'Orsay ». Il possède trois éléments : ce sont les circuits (L, O, P), (L, P, O), (P, L, O).
- $\overline{A}$ est l'événement « le circuit ne commence pas par le musée du Louvre ».
  Il possède quatre éléments : ce sont les circuits (O, L, P), (O, P, L), (P, L, O), (P, O, L).

Exercice 25 :

1. (a) La probabilité d'obtenir la lettre P est $\dfrac{1}{11}$ (il y a 11 cartes et une seule porte la lettre P).
   (b)

Issue	P	R	O	B	A	I	L	T	E
Probabilité	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$

2. Les voyelles sont O, A, I et E. Donc la probabilité d'obtenir une voyelle est : $\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{2}{11}+\dfrac{1}{11}=\dfrac{5}{11}$.

3. Les lettres qui n'apparaissent qu'une fois dans PROBABILITE sont P, R, O, A, L, T, E (7 lettres). Donc la probabilité d'obtenir une lettre qui n'apparaît qu'une fois est : $7 \times \frac{1}{11} = \frac{7}{11}$.

Exercice 26 :

1. (a) Chaque élève a autant de chance qu'un autre d'être choisi. Donc on est en équiprobabilité.

   (b) Nous avons $P(E) = \frac{\text{card}(E)}{34} = \frac{25}{34}$ et $P(F) = \frac{\text{card}(F)}{34} = \frac{18}{34} = \frac{9}{17}$

2. (a)
   - $F \cap E$ est l'événement « l'élève est une fille étudiant l'Espagnol ».

$$P(F \cap E) = \frac{\text{card}(F \cap E)}{34} = \frac{14}{34} = \frac{7}{17}$$

   - $F \cup E$ est l'événement « l'élève est une fille ou étudie l'Espagnol ».

$$P(F \cup E) = P(F) + P(E) - P(F \cap E) = \frac{18}{34} + \frac{25}{34} - \frac{14}{34} = \frac{29}{34}$$

   (b) $\overline{E}$ est l'événement « l'élève n'étudie pas l'Espagnol » ou encore « l'élève étudie soit l'Allemand soit l'Italien ».
   1$^{\text{ère}}$ méthode : $P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = 1 - \frac{25}{34} = \frac{9}{34}$.
   2$^{\text{e}}$ méthode : $P\left(\overline{E}\right) = \frac{\text{card}\left(\overline{E}\right)}{34} = \frac{6+3}{34} = \frac{9}{34}$ (car 6 élèves étudient l'Allemand et 3 l'Italien).

Exercice 27 :

On peut construire un tableau à double d'entrée :

	Èlèves connaissant Blaise Pascal	Èlèves ne connaissant pas Blaise Pascal	TOTAL
Èlèves connaissant Jacques Bernoulli	3	2	5
Èlèves ne connaissant pas Jacques Bernoulli	9	21	30
TOTAL	12	23	35

- Nous avons $P(C) = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$.
- D est l'événement contraire de C donc : $P(D) = P\left(\overline{C}\right) = 1 - P(C) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.
- Nous avons $P(E) = \frac{9+2}{35} = \frac{11}{35}$ (car 9 élèves connaissent Blaise Pascal sans connaître Jacques Bernoulli, et 2 élèves connaissent Jacques Bernoulli sans connaître Blaise Pascal).

Exercice 28 :

1. L'effectif total est : $2+17+23+7+25+5+1=80$

Âge	10	12	15	17	18	20	30
Effectif	2	17	23	7	25	5	1
Fréquence	$\frac{2}{80}=\frac{1}{40}$	$\frac{17}{80}$	$\frac{23}{80}$	$\frac{7}{80}$	$\frac{25}{80}=\frac{5}{16}$	$\frac{5}{80}=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{80}$

2. $\overline{x}=\dfrac{2\times 10+17\times 12+23\times 15+7\times 17+25\times 18+5\times 20+1\times 30}{80}=\dfrac{1268}{80}=15,85$

8 Divers, algorithmique

Exercice 29 :

1. (a) $1,2^3\times 1,2^5\times 1,2^{-2}=1,2^{3+5-2}=1,2^6$.
   (b) $\dfrac{8^3}{4^3\times 8}=\left(\dfrac{8}{4}\right)^3\times\dfrac{1}{8}=2^3\times\dfrac{1}{8}=8\times\dfrac{1}{8}=1$.
2. (a) $\dfrac{(6a)^5}{2a^3}=\dfrac{2^5\times 3^5\times a^5}{2a^3}=2^4\times 3^5\times a^2$ (ou bien : $\dfrac{(6a)^5}{2a^3}=\dfrac{6^5\times a^5}{2a^3}=\dfrac{6^5}{2}a^2$).
   (b) $2a^2\times a^3=2a^{2+3}=2a^5$.
   (c) $\dfrac{a^n\times b^n}{ab}=a^{n-1}\times b^{n-1}=(ab)^{n-1}$.

Remarque : les exercices 30, 31, 32 permettent de vous préparer aux bases de la trigonométrie telle qu'elle sera abordée en classe de 1$^{\text{ère}}$.

Exercice 30 :

1. VRAI. En effet le triangle ABC est rectangle en B donc le théorème de Pythagore justifie cette égalité.
2. FAUX. En effet le triangle AFB est rectangle en F donc n'est pas rectangle en B donc d'après la contraposée de la réciproque du théorème de Pythagore $AF^2\neq AB^2+BF^2$.
3. VRAI. En effet le triangle FEC est rectangle en E donc d'après le théorème de Pythagore, on a $FC^2=FE^2+EC^2$ d'où $FE^2=FC^2-EC^2$.
4. VRAI. En effet, dans le triangle BAF rectangle en F, on a :
$$\cos\left(\widehat{BAF}\right)=\frac{\text{« côté adjacent »}}{\text{« hypoténuse »}}=\frac{AF}{AB}\text{ et comme }\widehat{BAC}=\widehat{BAF}\text{, on obtient l'égalité proposée.}$$
5. FAUX. En effet, dans le triangle FBC rectangle en F, on a :
$\cos\left(\widehat{FCB}\right)=\dfrac{\text{« côté adjacent »}}{\text{« hypoténuse »}}=\dfrac{FC}{BC}$ et comme $\widehat{ACB}=\widehat{FCB}$, on obtient $\cos\left(\widehat{ACB}\right)=\dfrac{FC}{BC}$ et non $\dfrac{FC}{AC}$($BC\neq AC$ car ABC est rectangle en B).
6. VRAI. En effet, dans le triangle ABC rectangle en B, on a :
$$\sin\left(\widehat{ACB}\right)=\frac{\text{« côté opposé »}}{\text{« hypoténuse »}}=\frac{AB}{AC}.$$
7. VRAI. En effet, dans le triangle BFE rectangle en E, on a :
$$\sin\left(\widehat{BFE}\right)=\frac{\text{« côté opposé »}}{\text{« hypoténuse »}}=\frac{BE}{BF}.$$

Exercice 31 :

1. (a) Le triangle OHA est rectangle en H car H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle OAI.

   (b) D'après le théorème de Pythagore dans OHA rectangle en H on a :
   $OA^2 = OH^2 + AH^2$ soit $1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + AH^2$. Donc $AH^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
   Donc $AH = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   (c) On en déduit que $A\left(\frac{1}{2} \,;\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. D'après le théorème de Pythagore, dans AHI rectangle en H, on a :
   $AI^2 = AH^2 + HI^2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$. Donc $AI = 1$ et ainsi $AI = OA = OI$.
   Donc le triangle OIA est équilatéral.

3. B étant diamétralement opposé à A, on a $B\left(-x_A \,;\, -y_A\right)$ soit $B\left(-\frac{1}{2} \,;\, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 32 :

1. (a) $\frac{9\pi}{3} = 3\pi$

   (b) $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$

   (c) $\frac{3\pi}{4} - 6\pi = \frac{3\pi}{4} - \frac{24\pi}{4}$
   $= -\frac{21\pi}{4}$

   (d) $\frac{3\pi}{18} = \frac{\pi}{6}$

   (e) $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$

2. (a) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

   (b) $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   (c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}^2}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

   (d) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2^2} = \frac{3}{4}$

3. (a) $A = \frac{\pi}{6} + 2 \times 2 \times \pi$
   $= \frac{\pi}{6} + 4\pi$
   $= \frac{\pi}{6} + \frac{24\pi}{6}$
   $= \frac{25\pi}{6}$

   (b) $B = \frac{\pi}{3} + 2 \times (-1) \times \pi$
   $= \frac{\pi}{3} - 2\pi$
   $= \frac{\pi}{3} - \frac{6\pi}{3}$
   $= -\frac{5\pi}{3}$

   (c) $C = \frac{-2\pi}{3} + 2 \times 1 \times \pi$
   $= \frac{-2\pi}{3} + 2\pi$
   $= \frac{-2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}$
   $= \frac{4\pi}{3}$

Exercice 33 :

1. Pour $n = 2$, on peut utiliser un tableau :

k		1	2
U	15	$2 \times 15 + 3$ $= 33$	$2 \times 33 + 3$ $= 69$

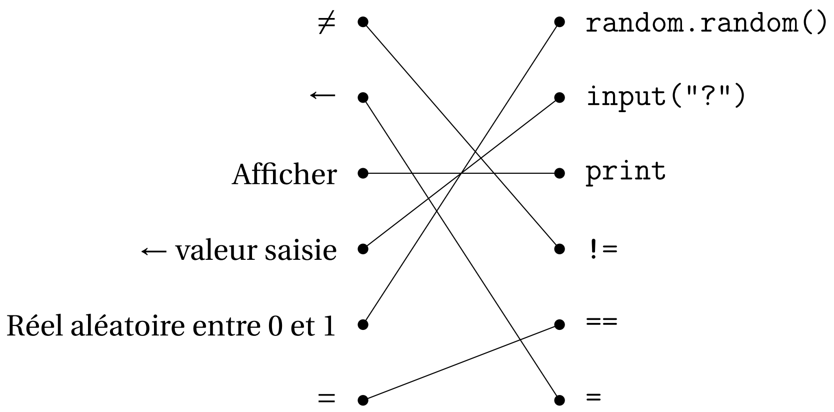
   On obtient donc l'affichage : 69.

2. Pour $n = 5$, on peut utiliser un tableau :

k		1	2	3	4	5
U	15	33	69	$2 \times 69 + 3$ $= 141$	$2 \times 141 + 3$ $= 285$	$2 \times 285 + 3$ $= 573$

On obtient donc l'affichage : 573.

Exercice 34 :



Exercice 35 :

1. (a) Si x prend la valeur 5 alors $2x - 17 = 2 \times 5 - 17 = -7$. Donc dans ce cas $2x - 17 < 5$ d'où le programme affiche « x est grand ».
   (b) Si x prend la valeur 17 alors $2x - 17 = 2 \times 17 - 17 = 17$. Donc dans ce cas $2x - 17 > 5$ d'où le programme affiche « x est petit ».
2. Le programme affiche « x est petit » si et seulement si $2x - 17 \geqslant 5$ (I).
   Or $(I) \iff 2x \geqslant 22 \iff x \geqslant 11$.
   Ainsi le programme affiche « x est petit » si et seulement si $x \geqslant 11$.

Exercice 36 :

1. (a) Pour $n = 5$, on peut utiliser un tableau :

i	0	1	2	3	4
x	$2 \times 0 + 1$ $= 1$	$2 \times 1 + 1$ $= 3$	$2 \times 2 + 1$ $= 5$	$2 \times 3 + 1$ $= 7$	$2 \times 4 + 1$ $= 9$

On obtient donc l'affichage : 1 3 5 7 9 (valeurs affichées les unes sous les autres. En effet, l'instruction « print (x) » est à l'intérieur de la boucle « for » donc la valeur de x est affichée à chaque étape).

(b) Pour $n = 8$, on peut utiliser un tableau :

i	0	1	2	3
x	$2\times0+1$ $=1$	$2\times1+1$ $=3$	$2\times2+1$ $=5$	$2\times3+1$ $=7$
i	4	5	6	7
x	$2\times4+1$ $=9$	$2\times5+1$ $=11$	$2\times6+1$ $=13$	$2\times7+1$ $=15$

On obtient donc l'affichage : 1 3 5 7 9 11 13.

Remarque : ce programme permet d'afficher les n premiers entiers naturels impairs.

2. Programme permettant d'afficher les carrés des n premiers entiers positifs :

```
def fonc(n):
    for i in range(n):
        x = i**2
    print(x)
```

Exercice 37 :

1. On peut utiliser un tableau :

A	5000	$5000\times1{,}03$ $=5150$	$5150\times1{,}03$ $=5304{,}5$	$5304{,}5\times1{,}03$ $=5463{,}635$
n	0	1	2	3
Condition $A<8000$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
A	$5463{,}635\times1{,}03$ $=5627{,}54405$	$5627{,}54405\times1{,}03$ $=5793{,}370372$	5970,261483	6149,369327
n	4	5	6	7
Condition $A<8000$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai

A	6333,85040	6523,86591	6719,581897	6921,16935	7128,80443
n	8	9	10	11	12
Condition $A<8000$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
A	7342,66856	7562,94862	7789,83708	8023,532195	
n	13	14	15	16	
Condition $A<8000$	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	

Nous avons $5000\times1{,}03^{15} < 8000$ et $5000\times1{,}03^{16} > 8000$.
Le programme s'arrête lorsque $A \geqslant 8000$ donc l'affichage sera : 16.

2. Ce programme répond à la question suivante :
« Quel est le plus entier naturel n tel que $5000\times1{,}03^n \geqslant 8000$? »